Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +?$, donc, par opérations $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.

3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. **a.** On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\mathrm{e}^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

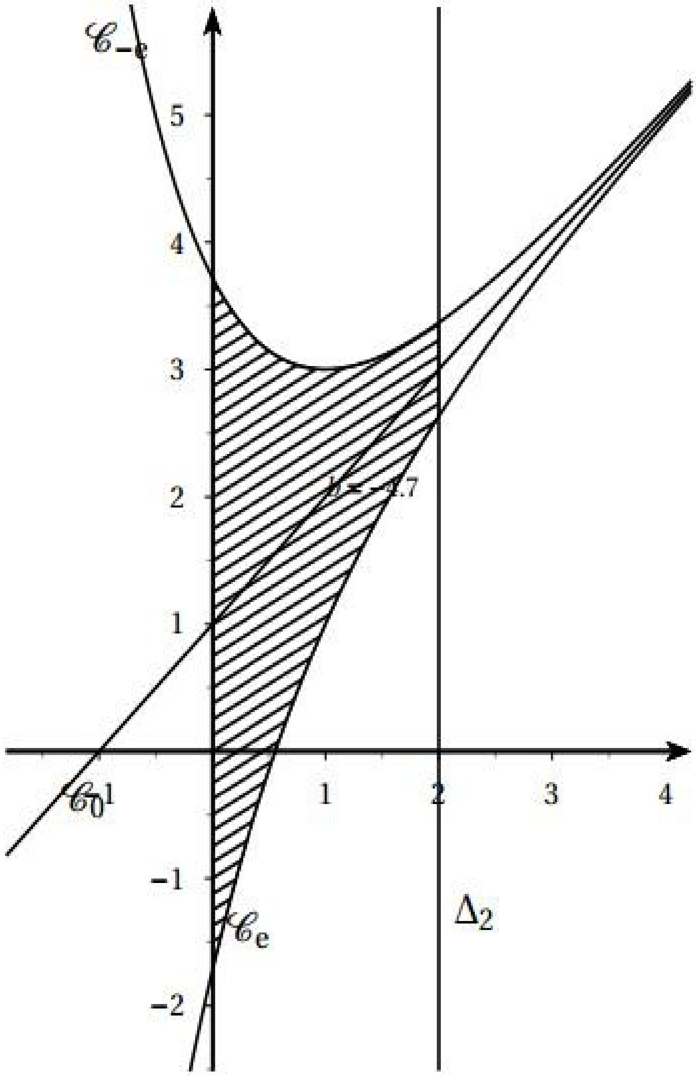
   b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :
   - si $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
   - si $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
   - si $-\frac{1}{\mathrm{e}^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
   - si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point .

2. • La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{e^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -e$.
   • La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{e^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
   • Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = e$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   • si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   • si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   • si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x)-(x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :

a.



b. Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-e}$ est au dessus de $\mathscr{C}_e$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a g_{-e}(x) - g_e(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left((x+1)+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right) - \left((x+1)-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a \\
&= 2\mathrm{e}\left(-\mathrm{e}^{-a}+1\right) \\
&= 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{1-a}.
\end{aligned}$$

On a de plus $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e}$.